Jeu de coloration d'arêtes

Gabriela Paris, LIRIS, Université Lyon 1
Séminaire des doctorants de première année

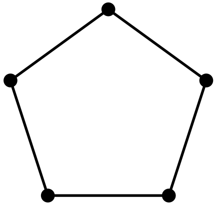
Sommaire

Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G



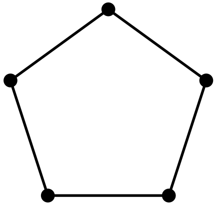
Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$,



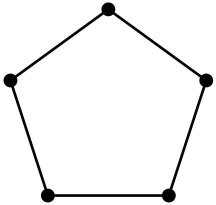
Jeu de coloration d'arêtes

On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

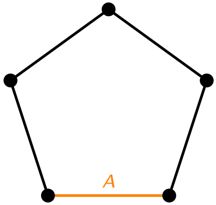
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

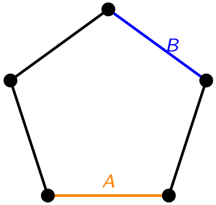
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

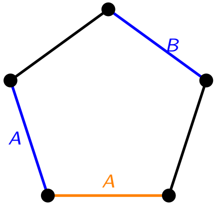
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

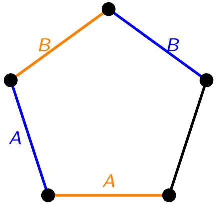
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Jeu de coloration d'arêtes

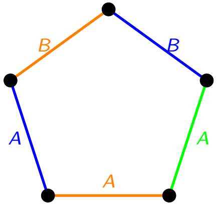
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Alice gagne si G colorié proprement.
Bob gagne si une arête ne peut pas être coloriée.

Jeu de coloration d'arêtes

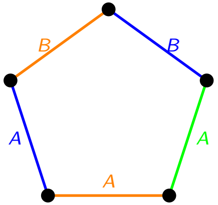
On peut définir les mêmes notions sur les arêtes d'un graphe.
Introduit en 1999 par Zhu.

Données :

- Un graphe G
- k couleurs
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils colorient proprement une arête.

$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$, A et B



Alice gagne si G colorié proprement.
Bob gagne si une arête ne peut pas être coloriée.

Définition

Le nombre minimum de couleurs pour qu'Alice ait une stratégie gagnante est l'*indice chromatique ludique*, noté $\chi'_g(G)$.

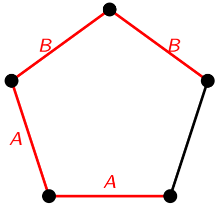
Jeu du marquage d'arêtes

Données :

- Un graphe G
- un entier k
- deux joueurs : Alice et Bob

À tour de rôle, ils marquent une arête ayant au plus $k-1$ voisins marqués.

$k=3$, A et B, marque =—



Alice gagne si G marqué.
Bob gagne si une arête ne peut pas être marquée.

Définition

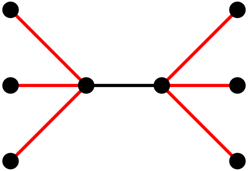
Le nombre minimum de couleurs pour qu'Alice ait une stratégie gagnante est l'*indice de marquage ludique*, noté $col'_g(G)$.

Premiers résultats

De manière similaire que pour les sommets, on peut montrer :

Théorème

Soit G un graphe. Alors
$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_g(G) \leq col'_g(G) \leq 2\Delta(G) - 1.$



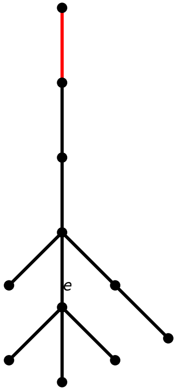
Sommaire

Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

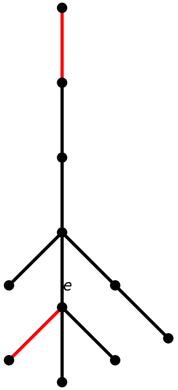


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque $=$ **-** , actif $=$ **-**

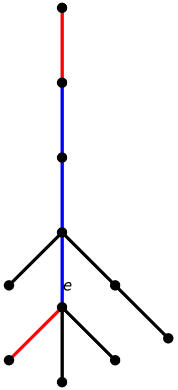


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = -, actif = -

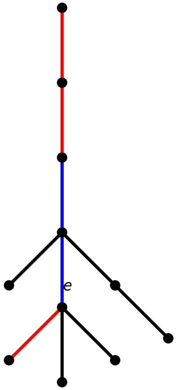


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = −, actif = −

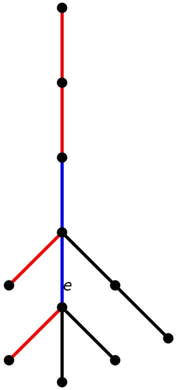


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = **-** , actif = **-**

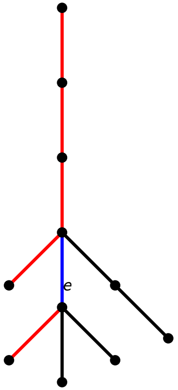


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

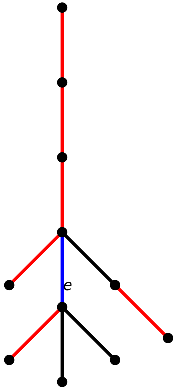


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

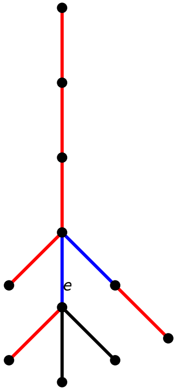


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

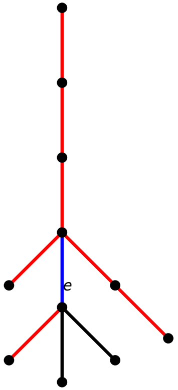


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = – , actif = –

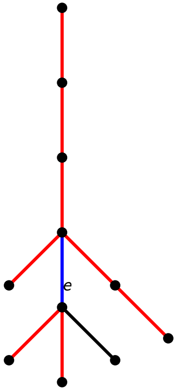


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = **-** , actif = **-**

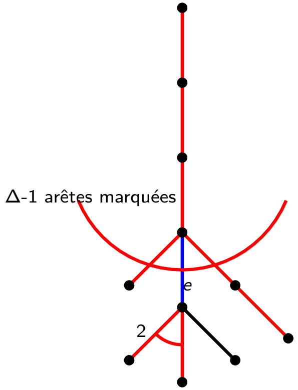


Stratégie d'activation pour les arêtes

Théorème (Lam, Shiu et Zhu en 1999)

Soit F une forêt. Alors $\chi'_g(F) \leq \Delta(F) + 2$.

Démonstration par stratégie d'activation : marque = - , actif = -



Quelques améliorations

Théorème (Erdös, Faigle, Hochtättler et Kern, 2003)

Pour tout $\Delta \geq 2$, il existe une forêt F de degré maximum Δ tel que $\chi'_g(F) = \Delta + 1$.

Théorème (Erdös, Faigle, Hochtättler et Kern, 2003 ; Andres, 2006)

Soit $\mathcal{F}_\Delta$ la classe des forêts de degré maximum Δ.
Alors pour $\Delta \neq 4$, $\chi'_g(\mathcal{F}_\Delta) = \Delta + 1$.

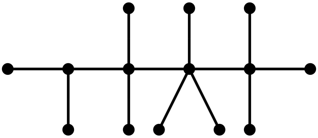
Le seul cas indéterminé est $\Delta = 4$: $5 \leq \chi'_g(\mathcal{F}_4) \leq 6$.

Sommaire

Définition

Définition

Une chenille est un arbre composé d'un chemin, appelé colonne, et d'arêtes incidentes à celle-ci, appelées pieds.

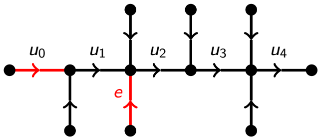


Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne

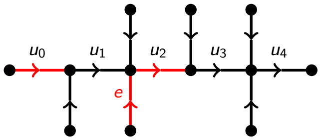


Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne

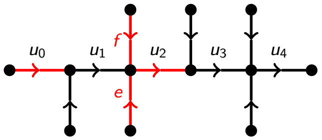


Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne



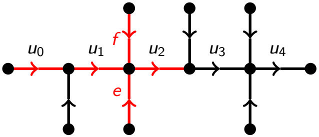
Quand une arête de la colonne est marquée, elle a au plus quatre arêtes voisines marquées.

Marquage sur les chenilles

Théorème (Charpentier et P.)

Soit C une chenille de degré maximum Δ. Alors, $col'_g(C) \leq \max\{5, \Delta\}$.

- arêtes orientées
- Alice marque l'arête qui suit
- ou l'arête qui précède dans la colonne



Quand une arête de la colonne est marquée, elle a au plus quatre arêtes voisines marquées. Quand un pied est marqué, il a au plus $\Delta - 1$ arêtes voisines.

Coloration sur les chenilles

Donc, d'après ce qu'on vient de voir :

Théorème (Charpentier et P.)

Soit $\mathcal{C}_\Delta$ la classe des chenilles de degré maximum Δ.
Pour $\Delta \geq 5$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$

Coloration sur les chenilles

Donc, d'après ce qu'on vient de voir :

Théorème (Charpentier et P.)

Soit $\mathcal{C}_\Delta$ la classe des chenilles de degré maximum Δ.
Pour $\Delta \geq 5$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$

Théorème (Charpentier et P.)

Pour $2 \leq \Delta \leq 4$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta + 1$.

Coloration sur les chenilles

Donc, d'après ce qu'on vient de voir :

Théorème (Charpentier et P.)

Soit $\mathcal{C}_\Delta$ la classe des chenilles de degré maximum Δ.
Pour $\Delta \geq 5$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$

Théorème (Charpentier et P.)

Pour $2 \leq \Delta \leq 4$: $\chi'_g(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta + 1$.

- $\Delta = 2$: c'est le cas des chaines.
- $\Delta = 3$ et $\Delta = 4$: démontré par étude de situations perdantes pour Alice.

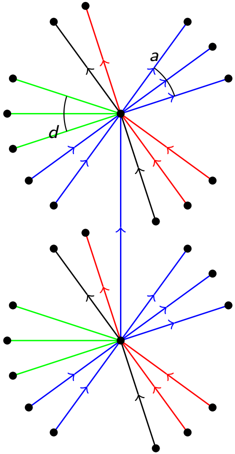
Sommaire

Définitions

Définition

On dit qu'un graphe $G(V, E)$ est $F^+(a, d_1, \ldots, d_k, d)$-décomposable s'il existe a forêts de degré maximum non borné, k forêts de degrés maximums respectivement d_1, d_2, ..., d_k avec $d_1 \geq d_2 \geq d_k$ et un graphe de degré maximum d.

Définitions



Définition

On dit qu'un graphe $G(V, E)$ est $F^+(a, d_1, \ldots, d_k, d)$-décomposable s'il existe a forêts de degré maximum non borné, k forêts de degrés maximums respectivement d_1, d_2, …, d_k avec $d_1 \geq d_2 \geq d_k$ et un graphe de degré maximum d.

Résultats

Avec une modification de la stratégie d'activation on peut montrer :

Théorème

Pour tout graphe G admettant une $F^+(a, \{d_1, \ldots, d_k\}, d)$-décomposition :

$$col'_g(G) \leq \max \left\{ \begin{array}{c} \Delta + 3a + k + d - 1 \\ \min \left\{ \begin{array}{c} 6a + 6k + 4d + 4\sum_{l \leq k} d_l - 2 \\ 6a + 2k + 4d + 2\sum_{l \leq k} d_l - 2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Merci pour votre attention !